Invariants et coloriages

Razvan Barbulescu (CNRS)

1er novembre 2014, club Parimaths

Ce cours reprend quasiment intégralement la leçon correspondante du stage Animath de Montpellier 2013 [polycopié]. Les exercices sont extraits du livre d'Engels [Eng98].

1 Cours

Un grand nombre de problèmes et exercices mathématiques se résument par la question "Est-il possible de suivre un tel processus pour faire ... ?". Si la réponse est oui, alors il suffit de donner un exemple. Si la réponse est non, alors la solution est beaucoup plus compliquée. On étudie ici deux techniques pour résoudre ce type de problèmes.

1.1 Coloriages

Les techniques de coloriages se comprennent le mieux sur des exemples.

Exercice 1. On appelle tétromino une dalle de 4 carrés en forme de I, $\square$, Z, T et L. Est-il possible de paver un rectangle avec une pièce de chaque type ?

Solution. La réponse à l'exercice est non, donc les techniques de coloriage et d'invariants peuvent être essayées.

Indépendamment de la forme du rectangle, on peut le colorier comme un échiquier, c'est-à-dire avec des cases noires et blanches de façon alternée. Quand on assoit un I sur le rectangle il cache exactement deux cases blanches et deux cases noires. Les pièces $\square$, Z et L font de même. Par manque de conformisme, la pièce T couvre toujours un nombre inégal de cases noires et blanches, trois d'une couleur et une de l'autre. Ainsi, l'ensemble des cinq pièces couvre un nombre inégal de cases noires et blanches.

Chaque tétromino a quatre cases, donc on doit paver un rectangle de 20 cases, de type 2×10 ou 4×5. Comme ce rectangle a un côté de longueur paire, il contient un nombre égal de cases blanches et noires. Il est donc impossible que l'ensemble de pièces couvre précisément le rectangle.

1.2 Invariants

Le principe des invariants consiste à trouver une quantité qui ne change pas, indépendamment des étapes suivies dans le processus. Si cet invariant a des valeurs différentes en deux positions, alors on ne peut pas passer de l'une à l'autre en suivant le processus.

Exercice 2. Les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sont écrits sur un tableau. Un mouvement consiste à remplacer deux nombres a et b de même parité par $(a+b)/2$ et $(b+a)/2$. Est-il possible de suivre ce processus pour rendre tout les nombres du tableau égaux.

Solution. La réponse est non, donc le principe des invariants est un bon outil. On remarque que la somme des nombres du tableau reste inchangée après chaque mouvement. En effet, on a

$$a + b = (a+b)/2 + (b+a)/2.$$

Comme la somme au départ n'est pas divisible par 5, elle ne le sera non plus à la fin du processus. Or, cinq nombre égaux ont une somme divisible par 5, ce qui complète la solution.

2 Exercices de coloriage

Exercice 3. Le jeux du taquin est formé de 15 carrés qui se déplacent dans un rectangle 4×4. On commence le jeux avec les 15 carrés dans un ordre quelconque et la case vide en bas à droite. Le but est de trier les 15 cases, en laissant la case vide de nouveaux en bas à droite. Montrer que le nombre de mouvements est pair.

Exercice 4. Le plancher est pavé avec des dalles de type 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée. Est-il possible de réarranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une nouvelle dalle de l'autre type ?

Exercice 5. On enlève les quatre cases situées aux coins d'un rectangle $n \times n$. Est-il possible de le paver avec des L-tétrominos ? Considérer successivement les cas : n impair, $n = 4k$ et, respectivement, $n = 4k + 2$ avec k entier.

Exercice 6. a) Les cases d'un rectangle 3×9 sont coloriées en deux couleurs. Montrer qu'il y a quatre cases d'une même couleur qui forment un rectangle. b) On colorie le plan en 2 couleurs. Montrer qu'il y a un rectangle dont tous les sommets ont la même couleur. c) Que se passe quand on colorie le plan en n couleurs ?

Exercice 7. Les villes d'un pays sont connectées par TGV comme dans la Figure 3. Est-il possible de faire un circuit qui passe exactement une fois par chaque ville ?

3 Exercices d'invariants

Exercice 8. Sur l'Île de Pâques vivent des caméléons qui peuvent changer de couleur selon leur bon gré, en bleu, blanc et rouge. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent par accident, ils ont peur et prennent tous les deux la troisième couleur. À un moment donné il y a 12 caméléons bleus, 25 blancs et 8 rouges. Est-il possible que tous les caméléons deviennent blancs ?

Exercice 9. Le processus consiste à transforme un mot en rajoutant ou en effaçant à l'intérieur du mot (en insérant) ou aux extrémités XXX, où X est un mot formé des chiffres 0 et 1. Par exemple le mot 1110001 peut se transformer en 0001110001, 1111, 0001, 1110001101010 etc. Est-il possible d'obtenir 10 à partir de 01 ?

Exercice 10. Les nombres $a_1, \ldots, a_n$ valent 1 ou -1. On pose $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et $a_{n+3} = a_3$. Sachant que

$$S(a_1, \ldots, a_n) = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$$

vaut 0, montrer que n est divisible par 4.

Exercice 11. Les entiers relatifs a, b, c, d ne sont pas tous égaux. À chaque itération on remplace (a, b, c, d) par $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Montrer qu'au moins un des quatre nombres va devenir arbitrairement grand en valeur absolue.

Exercice 12. i) Les entiers de 1 à n sont écrits dans l'ordre croissant, à l'exception de 1 et 2 qui sont échangés. Un mouvement consiste à échanger n'importe quels deux entiers. Montrer qu'on ne peut pas trier les n nombres, c'est à dire les mettre en ordre croissant, dans un nombre pair de mouvements.

ii) On défait le jeux du taquin et on échange les carrés 14 et 15. Est-il encore possible de résoudre le taquin ?

Exercice 13. On part de quatre triangles rectangles qui sont égaux (congruents). À chaque étape on choisit un triangle, on trace l'hauteur issue de l'angle droit et on considère les deux nouveaux triangles. Est-il possible d'obtenir des triangle deux à deux distincts ?

4 Un invariant classique

On appelle polyèdre tout objet géométrique à trois dimensions ayant des faces planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle arêtes.

Problème 1 (Invariant d'Euler). On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces. Montrer que pour tout polyèdre convexe on a

$$s - a + f = 2.$$

Solution (du problème 1). On recouvre le polyèdre par une membrane flexible. On perse une des faces et on aplatie la membrane sur une feuille de papier. Cela est possible car le polyèdre est convexe. Voir la Figure 1 pour un exemple. Ainsi on s'est amené au problème suivant : dans le plan on a un ensemble fini de points reliés par des courbes qui ne se coupent pas ; on note s le nombre de points, a le nombre de courbes et f le nombre de

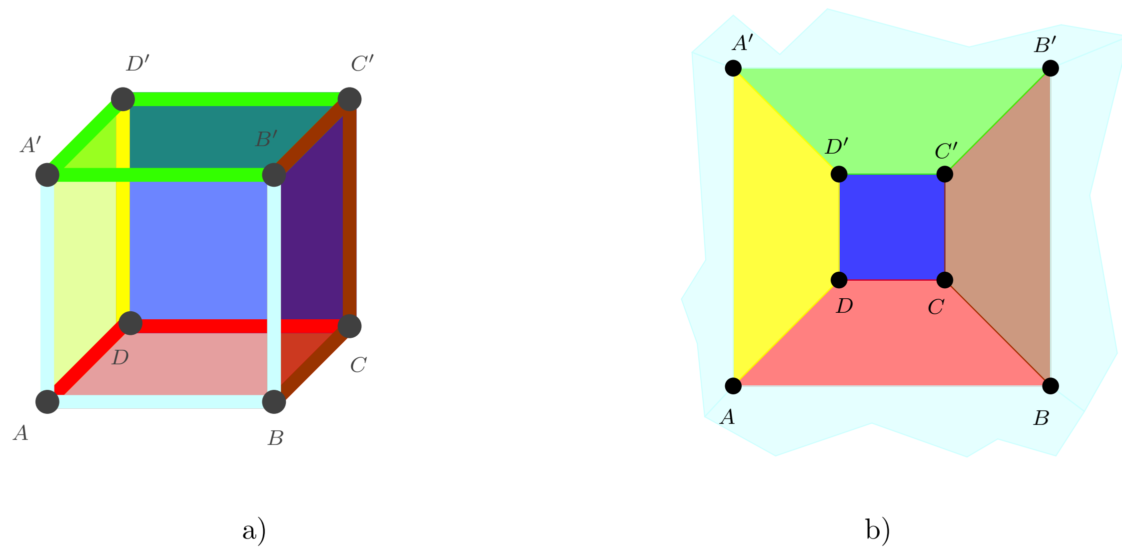


FIGURE 1 – Aplatissement du cube après perçage de la face ABB'A'.

zone du plan délimitées par les courbes ; alors $s - f + a = 1$. En effet, chaque courbe du dessin plan correspond à une arête, chaque zone à une face et chaque point à un sommet. La seule face qui n'a pas d'équivalent sur le plan est la face percée, qui maintenant est à l'extérieur du dessin plan.

Montrons que la quantité $s - f + a$ est invariante quand on enlève des points. Soit P un point qui touche l'extérieur du dessin plan. On parcourt les courbes qui sortent de P en sens trigonométrique et on les note $a_1, \ldots, a_n$. On note f_1 la face délimitée par a_1 et a_2, f_2 la face délimitée par a_2 et a_3 et ainsi de suite. Voir la Figure 2 pour une représentation. Quand on efface P, s diminue de 1, a diminue d'un certain nombre n et f diminue de $n-1$. Ainsi, la quantité $s - a + f$ est invariante.

Quand on arrive à trois points on arête le processus. On a forcément un triangle, donc $s = 3$, $a = 3$ et $f = 1$, ce qui achève la preuve.

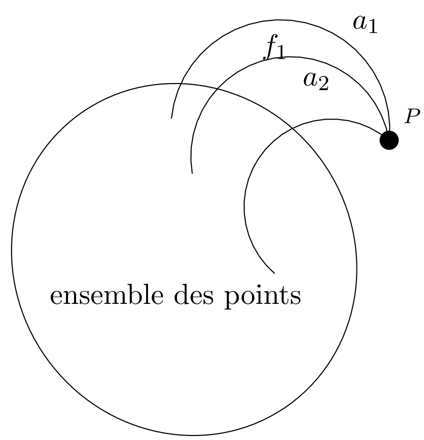


FIGURE 2 – Invariance de la formule d'Euler.

5 Solutions des exercices de coloriage

Solution (de l'exercice 3). On colorie le support du taquin, situé en dessous des 15 carrés mobiles en échiquier. À chaque mouvement, la case vide change de couleur. Comme au début et à la fin la case vide a la même position, donc la même couleur, le nombre de mouvements est pair.

Solution (de l'exercice 4). On colorie la première ligne en carrés bleus et rouges en commençant par bleu, la deuxième en noir et blanc en commençant par noir. Ensuite on continue avec des lignes alternées bleu-rouge et noir-blanc en commençant toujours par bleu et noir respectivement. Alors les dalles 2×2 couvrent exactement un carré de chaque couleur. Une dalle 1×4 couvre 2 carrés d'une couleur et 2 d'une autre. Ainsi, la parité du nombre de dalles bleues dans le plancher est égale à la parité du nombre de dalles 2×2. Échanger une dalle 2×2 par une dalle 1×4 revient à changer la parité du nombre de dalles bleues couvertes, ce qui est interdit.

Solution (de l'exercice 5). cas n impair. Le nombre de cases à couvrir, $n^2 - 4$ est impair. Il ne peut pas être couvert par des L-tétrominos, qui ont 4 cases chacune.

cas $n = 4k$. On colorie la première colonne du rectangle en blanc, la deuxième en noir, la troisième en blanc et ainsi de suite. Chaque L-tétromino couvre un nombre impair de cases blanches (une ou trois), indépendamment de sa position. Comme caque colonne du rectangle privé de ses quatre coins a un nombre pair de cases blanches (zéro, n ou $n-2$), le nombre de cases blanches à couvrir est pair. On suppose par l'absurde qu'en pavage en

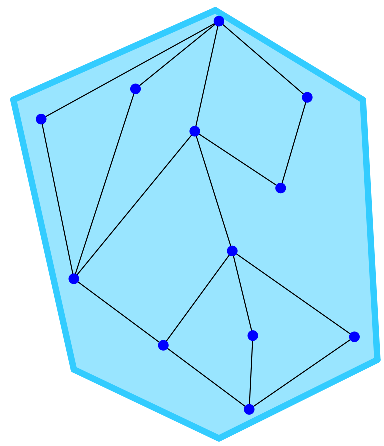


Figure 3 – Figure de l'exercice 7.

L-tétrominos est possible. On utilise donc un nombre pair de L-tétrominos ; notons le $2a$ avec a entier.

On finis par un petit raisonnement algébrique. Les n^2-4 cases à couvrir sont pavées par $2a$ pièces à 4 cases chacune, donc $n^2-4=8a$. Comme $n=4k$, cela revient à $16k^2-4=8a$. Ensuite, $4=16k^2-8a=8(2k^2-a)$, donc 4 est un multiple de 8. Contradiction.

<u>cas $n=4k+2$</u> Ici la réponse est oui, donc il faut donner un exemple de pavage. Si $n \geq 8$ on utilise les coloriage des sousfigures a) et b) de la Figure 4 pour border le rectangle. Ainsi, on se ramène à colorier un rectangle de taille $(n-8)\times(n-8)$ dont les quatre coins sont enlevés. On continue jusqu'à ce que $n \leq 6$. Si au départ $n=8k+6$, alors il faut traiter le cas $n=6$, ce qu'on fait dans la sousfigure c). Si au départ $n=8k+2$, alors on se ramène au cas $n=2$. Or un rectangle 2×2 sans ses quatre coins est vide, donc pavé de manière triviale. De manière équivalente, si $n=8k+2$, alors on couvre tout le rectangle en couvant à chaque fois son bord comme dans les sousfigures a) et b).

Solution (de l'exercice 6). On est devant un faux exercice de coloriage, donc il ne faut pas utiliser les techniques de ce cours. On utilise le principe des tiroirs.

a) Chaque colonne 3×1 du rectangle 3×9 est colorié dans un triplet de couleurs extrait de l'ensemble $\{1,2\}\times\{1,2\}\times\{1,2\}$. On sait que le produit cartésien de 2 ensembles à a et, respectivement, b éléments est ab. Donc, on a $2^3=8$ possibilités pour chaque colonne. D'après le principe des tiroirs, il y a au moins 2 colonnes sur 9 qui sont coloriées identiquement, (c_1,c_2,c_3). Dans ce triplet, il y a forcément une couleur majoritaire, qui apparaît deux ou trois fois. Quatre cases de la couleur majoritaire, sur les deux colonnes

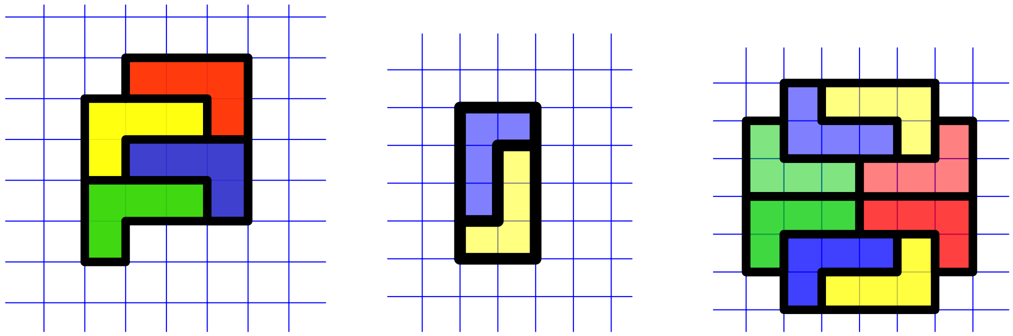


Fig a) Fig b) Fig c)

FIGURE 4 – Solution de l'exercice 5

identiques forment alors un rectangle monochrome.

b) On dessine dans le plan 3 rangées à 9 points chacune. On conclue de la même manière qu'au point a).

c) On considère un ensemble de $n+1$ rangées de points, chacune contenant $n^{n+1}+1$ points. Pour chaque rangée à $n+1$ points, on a n^{n+1} coloriages possibles en n couleurs. Par le principe des tiroirs, il existe deux rangées qui sont coloriées de la même façon. Chacune de ces deux rangées contient au moins une couleur deux fois. Quatre points de cette couleur sur les deux rangées identiques forment un rectangle monochrome.

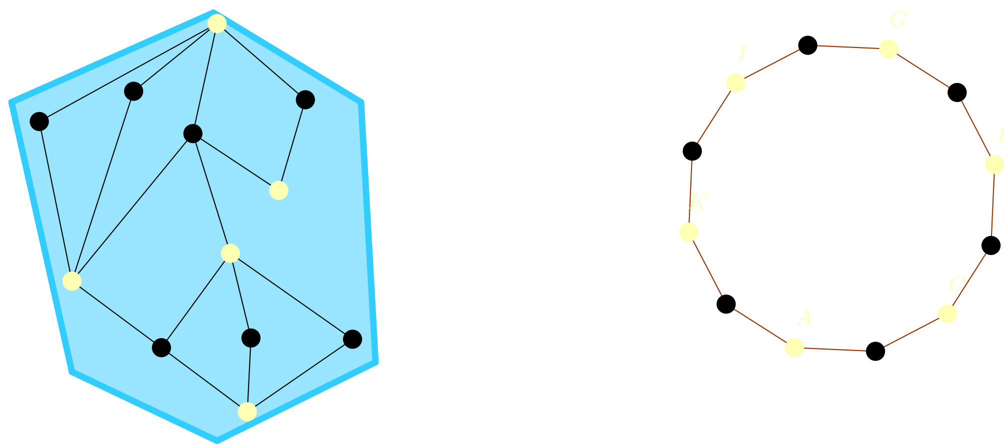
Solution (de l'exercice 7). On colorie le sommet le plus haut en blanc, comme dans la Figure 5 a). On remarque ensuite qu'on peut colorier tous ses voisins en noir sans que deux villes noires soient voisines. Ensuite on colorie toutes les villes voisines d'une ville noire en blanc et on remarque de nouveau qu'il n'y a pas de voisins de la même couleur. On continue jusqu'à ce que toutes les villes sont noires ou blanches.

Un circuit doit alterner les villes noirs et blanches donc il doit en avoir le même nombre de chaque couleur, ou au plus une ville de différence. Voir par exemple la Figure 5 b). En comptant les villes sur la Figure 5, on a 7 villes noires et 5 villes blanches. Donc il n'existe pas de circuit qui passe une seule fois par chaque ville.

Note : Le type de circuit demandé est dit hamiltonien.

6 Solutions des exercices d'invariants

Solution (de l'exercice 8). On note n_1, n_2 et n_3 le nombre de caméléons bleus, blancs et, respectivement, rouges. À chaque rencontre, les différences $n_1 - n_2$, $n_1 - n_3$ et $n_2 - n_3$ ne changent pas modulo 3. En effet, si un bleu et un blanc se rencontrent, n_1 et n_2 diminuent de 1, donc la différence $n_1 - n_2$ est inchangée. Si un caméléon blanc rencontre un caméléon rouge, n_1 augmente de 2 et n_2 baisse de 1. La différence $n_1 - n_2$ diminue de 3, donc son



a) b)

FIGURE 5 – Solution de l'exercice 7.

reste modulo 3 est inchangé.

Dans la configuration initiale, on a $n_1 - n_2 \equiv 12 - 25 \equiv 2 \bmod 3$. On nous demande d'avoir $n_2 = 45$ et $n_1 = 0$ donc $n_1 - n_2 \equiv 0 \bmod 3$. Il est donc impossible que tous les caméléons deviennent blancs.

Solution (de l'exercice 9). La réponse est non. On doit trouver un invariant qui tient compte des positions des chiffres 1. Pour tout mot $W = w_1 w_2 \cdots w_n$ on pose $I(W) = 1 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + \cdots + n \cdot w_n$. Quand on ajoute ou insère XXX, chaque lettre du mot X de longueur k, $X = x_1 x_2 \ldots x_k$, la lettre x_i se trouve dans le mot WXXX sur les positions d'indice i, $i + k$ et $i + 2k$. La partie de W qui est déplacée pour insérer XXX a été décalée de $3k$ positions. Ainsi

$$I(WXXX) \equiv I(W) \bmod 3.$$

De manière analogue, $I(XXXW) \equiv I(W) \mod 3$ et $I(W_1XXXW_2) \equiv I(W_1W_2) \bmod 3$.

Comme $I(01) = 2$ et $I(10) = 1$, il est impossible de passer de 01 à 10.

Solution (de l'exercice 10). Cet exercice est spécial car, même si on voit qu'il s'agit d'un exercice d'invariant, on ne nous donne pas de processus, c'est à nous de le définir.

On appelle configuration tout choix possible pour le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$. Un mouvement c'est le changement de signe de a_i pour un certain indice i. On va montrer que le reste de $S(a_1, \ldots, a_n)$ modulo 4 est un invariant. Comme $S(1, \ldots, 1) = n$, on a

$$S(a_1, \ldots, a_n) \equiv n \mod 4$$

pour toute configuration $(a_1, \ldots, a_n)$. Or, d'après l'énoncé, une des configuration a une valeur nulle pour S, donc on conclura que n est multiple de 4.

Il reste à montrer l'invariance. Quand on change le signe d'un nombre a_i pour l'indice $i \in [1, n]$, la différence entre la nouvelle et l'ancienne valeur de S est

$$\pm 2a_i \left(a_{i-3}a_{i-2}a_{i-1} + a_{i-2}a_{i-1}a_{i+1} + a_{i-1}a_{i+1}a_{i+2} + a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}\right).$$

Comme la parenthèse a 4 termes impairs, sa valeur est paire. Ainsi, S ne change jamais son reste modulo 4.

Solution (de l'exercice 11). Ce qu'on apprend dans cet exercice est qu'un type de fonction invariante à regarder sont les tailles. Par cela on comprend la valeur absolue du plus grand nombre, la somme des valeurs absolues, la somme des carrés et autres. Dans ce cas précis on regarde $S(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Si on met un indice n pour la valeur des nombres après n itérations alors on remarque que $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ indépendamment de $n \geq 1$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} S(a_{n+1}, +b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1}) &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 = (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n). \end{aligned}$$

Or l'égalité $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ nous aide à simplifier l'expression. On a

$$0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n).$$

Finalement, on a

$$S(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) = 2S(a_n, b_n, c_n, d_n) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \geq 2S(a_n, b_n, c_n, d_n).$$

Ainsi S double de taille à chaque itération. Comme a, b, c, d ne sont pas tous égaux, a_1, b_1, c_1, d_1 ne sont pas tous nuls, donc la valeur initiale de S est non nulle. Alors, S deviens arbitrairement grand. En particulier un des nombres a_n^2, b_n^2, c_n^2 et d_n^2 devient arbitrairement grand.

Solution (de l'exercice 12). i) On appelle permutation toute liste des nombres de 1 à n, écrit dans n'importe quel ordre. L'exercice nous demande de montrer une propriété importante des permutations. Si i et j sont deux nombres de 1 à n avec $i < j$ on dit qu'il sont dans le bon ordre si i apparaît à gauche de j dans notre liste. Sinon on dit que le couple (i, j) est une inversion de notre permutation. Un invariant classique des permutations est la signature : si σ est une permutation on pose $\varepsilon(\sigma) = 1$ si elle a un nombre pair d'inversion et -1 si elle a un nombre impair. Pour résoudre l'exercice il suffit de montrer qu'à chaque échange entre deux coordonnées d'une permutation, on change le signe de ε.

Sans restreindre la généralité on peut supposer qu'on échange i et j avec $i < j$. D'abord, l'échange de i et de j rajoute l'inversion (i, j). Soit k un nombre qui se trouve dans la permutation entre i et j. Si k est plus petit que i, alors l'échange de i et j remplace l'inversion (k, i) par l'inversion (k, j). De même, si $k > j$, l'inversion (j, k) est remplacée par l'inversion (i, k). Si $i < k < j$ alors l'échange de i et j rajoute ou enlève 2 inversions. Dans tous les cas, l'échange de i et j change la parité du nombre d'inversions, donc le signe de ε.

ii) Le point i) nous dit que pour résoudre le taquin modifié (avec deux carrés enlevés et échangés) on devrait faire un nombre impair de mouvements. Or, l'exercice 3 nous dit qu'il faut un nombre pair de mouvements. Contradiction.

<u>Anecdote</u> En 1891 Sam Loyd a vendu des modèles de taquins modifiés où les cases 14 et 15 étaient inversées. Pour augmenter les ventes de son taquin, il offrait 1000 dollars à quiconque aurait résolu le jeu devant lui.

Solution (de l'exercice 13). On commence par des considérations de géométrie. On note 1 l'hypothénuse des triangles de départ et p et q les deux côtés. Chaque découpage d'un triangle T produit deux triangles semblables à T, de rapport p et respectivement q. Ainsi tous les triangles T obtenus au cours du processus sont caractérisés par les entiers m et n tels que T, a un rapport $p^m q^n$ avec les triangles initiaux. Chaque découpage remplace un triangle (m, n) par un triangle $(m + 1, n)$ et un triangle $(m, n + 1)$.

On a retranscrit l'exercice sous forme d'un processus. Maintenant, on peut faire soit un raisonnement direct, à distinction de cas, soit un raisonnement par invariants.

<u>Méthode par distinction des cas</u> Considérons un dessin qui fait apparaître les 4 triangles initiaux, et toutes les étapes intermédiaires jusqu'à obtenir uniquement des triangles distincts. On prend un tel dessin avec le plus petit nombre possible d'étapes d'application du processus.

Au début, on a 4 triangles auxquels on applique le processus. Si deux triangles sont inchangés, alors on n'a pas différencié tous les triangles. Donc au moins 3 triangles initiaux sont replacés par 3 paires de triangles de rapport p et q. Sur les 3 triangles de rapport p, il y a forcément 2 qui doivent suivre le processus, donc on obtient deux paires p^2 et pq. De manière analogue, 2 des triangles q doivent se transformer en q^2 et pq. On a donc 4 triangles pq qui apparaissent dans le dessin. Cela est une contradiction, car si on pouvait distinguer ces 4 triangles, on aurait appliqué les mêmes mouvements aux quatre triangles initiaux et on aurait eu un dessin plus petit.

<u>Méthode par invariants</u> À un ensemble de triangles on associe la fonction $I = \sum \frac{1}{2^{m+n}}$, qui est invariante pour les découpages. Pour la trouver on doit observer que l'aire d'une configuration de triangles est constante. Or l'aire vaut $A = \sum p^n q^m$. Pour simplifier les calculs on utilise l'aire comme si $p = 1/2$ et $q = 1/2$.

Au début I vaut 4, donc il doit valoir 4 à la fin. Supposons par l'absurde qu'après un nombre fini d'étapes on a seulement des triangles non congruents. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des paires (m, n) tels qu'à la fin on a un triangle de rapport $p^m q^n$. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ les ensemble de valeurs de m et respectivement n qui apparaissent dans $\mathcal{T}$. Posons $M = \max \mathcal{M}$ et

$N = \max \mathcal{N}$. Comme $\mathcal{M} \subset \{0, \ldots, M\}$ et $\mathcal{N} \subset \{0, \ldots, N\}$, on a

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{1}{2^m} \leq \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{2^m} = 2 - \frac{1}{2^{M+1}}$$

et

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{N+1}}.$$

Comme $\mathcal{T} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, on a

$$I = \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}} \frac{1}{2^{m+n}} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}, n \in \mathcal{N}} \frac{1}{2^{m+n}}$$

$$= (\sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{1}{2^m}) \cdot (\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{2^n}) \leq \left(2 - \frac{1}{2^{M+1}}\right)\left(2 - \frac{1}{2^{N+1}}\right) < 4,$$

ce qui est une contradiction.

Références

[polycopié] Animath. Polycopié du stage de montpelier 2013. disponible en ligne à `http://www.animath.fr/IMG/pdf/poly_2013-2.pdf`.

[Eng98] Arthur Engel. *Problem-solving strategies*. Springer New York, 1998.