

# Introduction aux inégalités

-cours-

Razvan Barbulescu

ENS, 8 février 2014

## 1 Inégalité des moyennes

Faisons d'abord la liste des propriétés simples des inégalités:

- $a \geq a'$  et  $b \geq b' \Rightarrow a + b \geq a' + b'$ ;
- $s \geq 0$  et  $a \geq a' \Rightarrow sa \geq sa'$ ;
- $a \geq a' > 0 \Rightarrow \frac{1}{a'} \leq \frac{1}{a}$ .

**Définition 1.** Soit  $a_1, \dots, a_n$  des variables. Si  $E(a_1, \dots, a_n)$  est une expression, la somme symétrique, notée  $\sum_{cyc} E(a_1, \dots, a_n)$  est la somme de tous les termes obtenus en échangeant  $a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, \dots, a_{n-1} \rightarrow a_n$  et  $a_n \rightarrow a_1$ .

Par exemple  $\sum_{cyc} a^2$  désigne  $a^2 + b^2 + c^2$  et  $\sum_{cyc} a^3(b^2 + c)$  désigne  $a^3(b^2 + c) + b^3(c^2 + a) + c^3(a^2 + b)$ .

**Exercice 1.** Montrer que, indépendamment du nombre de signes  $\sqrt{\phantom{x}}$ , on a

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} < 3.$$

**Exercice 2.** Montrer que  $\sum_{n=1}^{2014} \frac{1}{n^2} < 2$ .

**Remarque 1.** Si on continue à sommer des termes  $\frac{1}{n^2}$  on constate qu'on se rapproche du nombre  $\frac{\pi^2}{6}$ .

**Théorème 1** (Inégalité des moyennes). Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs. Montrer que:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

On résume ainsi: moyenne quadratique  $\geq$  moyenne arithmétique  $\geq$  moyenne géométrique  $\geq$  moyenne harmonique.

**Remarque 2.** • Si un train se déplace la moitié du trajet à 320km/h et l'autre moitié à 80km/h, la vitesse moyenne est la moyenne harmonique.

- La température absolue d'un gaz est la moyenne quadratique des vitesses des molécules qui le composent.

*Proof.* L'inégalité arithmético géométrique est équivalente à  $(x + y)^2 \geq 4xy$ , ou de manière équivalente  $(x - y)^2 \geq 0$ . Toutes les autres inégalités du théorème en découlent facilement.  $\square$

**Exercice 3.** Montrer l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique pour quatre, puis trois, nombres.

*Proof.* On écrit  $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$ .

Pour passer à trois nombres, on pose  $d = \frac{a+b+c}{3}$ . Ainsi  $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+b+c}{3}$ . Par ce qu'on vient de prouver, on sait que  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \frac{a+b+c}{3}}$ . En élevant à la puissance 4-ème on trouve  $(\frac{a+b+c}{3})^4 \geq xyz \frac{a+b+c}{3}$  et finalement

$$\frac{a + b + c}{3} \geq 3\sqrt[4]{xyz}.$$

$\square$

**Exercice 4** (Inégalité de Nesbitt). Soient  $a, b, c > 0$ . Montrer que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

*Proof.* On rajoute 3 et l'inégalité devient

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Or, cela est l'inégalité des moyennes arithmétique et harmonique pour  $x = b+c$ ,  $y = c+a$  et  $z = a+b$ .  $\square$

## 2 Convexité

**Définition 2.** Soit  $I$  un intervalle réel et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est convexe si, pour tous  $x, y \in I$ , on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Une fonction  $g$  est concave si  $-g$  est convexe.

**Exercice 5.** Montrer que les fonctions  $f, g : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \sqrt{x}$  sont convexes.

**Remarque 3.** En utilisant les dérivées secondes on peut faire un calcul pour décider si une fonction est convexe.

**Théorème 2** (Propriété des fonctions convexes, Jensen). Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue convexe. Soient  $a_1, \dots, a_n$  des nombres réels positifs tels que  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . Alors, pour tous  $x_1, \dots, x_n \in I$ , on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i).$$

**Exercice 6.** On admet que, pour tout réel non-nul  $\alpha$ , l'application  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^\alpha$  est convexe. Montrer que:

$$m_2 \geq m_1 \geq m_{-1},$$

$$\text{où } m_2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}, m_1 = \frac{x+y+z}{3} \text{ et } m_{-1} = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

*Proof.* On applique l'inégalité de Jensen à la fonction  $x \mapsto x^2$ , pour les coefficients  $a_i =$  □

### 3 Inégalité géométriques

<sup>1</sup> La plupart des inégalités triangulaires se résolvent par une des techniques suivantes:

- on se ramène à l'inégalité triangulaire;
- on traduit le problème dans une inégalité algébrique;
- on utilise des formules géométriques.

En guise d'explication, faisons trois exercices.

**Exercice 7** (Application de l'inégalité triangulaire). Montrer que dans un triangle  $ACB$ , de médienne  $AM$ , on a:

$$AM \leq \frac{AB + AC}{2}.$$

*Proof.* On considère le symétrique  $A'$  de  $A$  par rapport à  $M$ . Dans le triangle  $ACA'$  on a  $AA' \leq AC + CA'$ . Comme les triangles  $BMA$  et  $CAA'$  sont égaux, on a  $CA' = AB$ . En utilisant que  $AA' = 2AM$ , on obtient l'inégalité. □

**Exercice 8** (Application de la traduction en langage algébrique). Dans le triangle  $ABC$  on a  $AB < AC$ . Montrer que, pour tout  $D \in [BC]$  on a  $AD \leq AC$ .

*Proof.* On note  $H$  le pied de l'hauter issue de  $A$  et  $h = AH$ . Comme  $AB^2 = h^2 + BH^2$  et  $AC^2 = h^2 + CH^2$ , on déduit que  $BH < CH$ . Alors, pour tout  $D \in [BC]$  on a  $DH < CH$ . Donc  $AD^2 = h^2 + DH^2 < CH^2$ . □

---

<sup>1</sup>Exercices de [www.MateInfo.ro](http://www.MateInfo.ro)

**Exercice 9** (Application des formules géométriques). *Si  $x, y, z$  sont les longueurs des côtés d'un triangle, montrer que:*

$$2(xy + yz + zx) \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

*Proof.* On rappelle la formule d'Héron: pour  $a, b, c$  les côtés du triangle  $ABC$  on a

$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

où  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . Cela implique

$$\begin{aligned} 16A_{\triangle ABC}^2 &= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\ &= [((a+b)+c)((a+b)-c)][(c+(a-b))(c-(a-b))] \\ &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \\ &= [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)] \\ &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4). \end{aligned}$$

On conclue que  $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^4 + b^4 + c^4)$ .

C'est inégalité recherchée, mais avec  $a, b, c$  à la place de  $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ . Il suffit donc de montrer qu'il existe un triangle de côtés  $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$  et  $c = \sqrt{z}$ . On a  $a \leq b+c$  si et seulement si  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{z}$ , ce qui équivaut à  $x \leq y+z+2\sqrt{yz}$ . Or, cette dernière inégalité est vraie car  $x, y, z$  sont les côtés d'un triangle. □

# Exercices – inégalités

Razvan Barbulescu

ENS, 8 février 2014

**Exercice 1.** Soient  $a, b, c$  trois réels positifs. Montrer que  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

*Démonstration.* Par l'inégalité arithmético-géométrique, appliquée à  $a^2$  et  $b^2$  :  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ . De manière équivalente

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \quad (1)$$

De la même manière on obtient :

$$b^2 + c^2 \geq 2bc, \quad (2)$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ac. \quad (3)$$

Quand on somme les trois équations, on obtient  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$ . En divisant par 2, on trouve l'inégalité demandée.  $\square$

**Exercice 2.** Montrer que  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ . En déduire une preuve de l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres.

*Démonstration.* L'identité se montre par calcul direct. Soient  $x, y, z$  trois nombres positifs. On applique l'identité pour  $a = \sqrt[3]{x}$ ,  $b = \sqrt[3]{y}$  et  $c = \sqrt[3]{z}$ . Alors  $x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca))$ . D'après l'Exercice 1, cette deuxième parenthèse est positive. Ainsi  $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ .  $\square$

**Exercice 3.** Pour  $a, b, c > 0$ , montrer que  $(a + b + c)^3 \geq \frac{27}{8}(a + b)(b + c)(c + a)$ .

*Démonstration.* On applique l'inégalité arithmético-géométrique aux nombres  $x = a + b$ ,  $y = b + c$  et  $z = a + c$ .  $\square$

**Exercice 4.** Si  $a, b, c > 0$  sont les côtés d'un triangle, montrer que

$$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc.$$

*Démonstration.* Comme  $a, b, c$  sont les côtés d'un triangle, on peut poser  $x = b + c - a > 0$ ,  $y = a + c - b > 0$  et  $z = a + b - c > 0$ . Alors l'inégalité devient  $8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$  qui s'obtient par l'inégalité arithmético-géométrique.  $\square$

**Exercice 5.** Pour  $a, b, c > 0$ , montrer que

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

*Démonstration.* On écrit l'inégalité sous la forme

$$\left( \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{b(a+b)} \right) \left( \sum_{\text{cyc}} a \right) \left( \sum_{\text{cyc}} (a+b) \right) \geq 27$$

et on applique l'inégalité arithmético-géométrique.  $\square$

**Exercice 6.** Soient  $a, b, c, d > 0$  tels que  $a + b + c = 1$ . Alors on a

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \leq 2\sqrt{3}.$$

*Démonstration.* Montrons que la fonction  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1-x}$  est concave. Pour tout  $a$  et  $b$  de  $]0, 1[$  on doit vérifier que  $\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} \leq 2\sqrt{1 - \frac{a+b}{2}}$ . Cela est équivalent à  $2\sqrt{1-a}\sqrt{1-b} \leq (1-a) + (1-b)$ . Or, cela est vrai par l'inégalité arithmético-géométrique, appliquée à  $x = 1-a$  et  $y = 1-b$ .

Comme  $f$  est concave, on peut appliquer l'inégalité de Jensen. On prend  $x_1 = 1-a$ ,  $x_2 = 1-b$ ,  $x_3 = 1-c$  et les coefficients  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{1}{3}$  et  $a_3 = \frac{1}{3}$ , et on a  $\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$ . De manière équivalente, on a

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} \leq 3\sqrt{1 - \frac{a+b+c}{3}} = 2\sqrt{3}.$$

$\square$

**Exercice 7.** Soient  $a, b, c$  trois nombres tels que  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$ . Montrer que

$$(a-b)(a^2-9) + (a-c)(b^2-9) + (b-c)(c^2-9) \leq 36.$$

*Démonstration.* On note  $f(a, b, c)$  le membre gauche de l'inégalité. On remarque que, si  $a > 0$  et  $\epsilon$  est un nombre tel que  $0 < \epsilon < a$ , alors  $f(a, b, c) \leq f(a-\epsilon, b-\epsilon, c-\epsilon)$ . Ainsi on peut supposer que  $a$  est nul. On a  $f(0, b, c) = 9b + 9c - cb^2 + 9b - c^2b - c^3 + 9c$ . En faisant les calculs, on trouve que le membre gauche vaut  $c(18 - b^2 - c^2 + bc) = c[18 - (b - \frac{c}{2})^2 - \frac{3}{4}c^2] \leq \frac{1}{4}c(24 - c^2)$ . Il reste à montrer  $c^3 + 48 \geq 24c$ . On applique l'inégalité arithmético-géométrique à  $x = c^3$ ,  $y = 24$  et  $z = 24$  et on trouve  $48 + c^3 \geq 12\sqrt[3]{9c} > 12\sqrt[3]{8c} = 24c$ .  $\square$

**Exercice 8.** Pour  $a, b, c \in [0, 1]$ , montrer que  $a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq 1$ .

*Démonstration.* On a  $a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \leq a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) = a + b + c - (ab + bc + ca) = 1 - (1-a)(1-b)(1-c) - abc \leq 1$ .  $\square$

**Exercice 9.** Soient  $a, b, c > 0$  tels que  $ab + bc + ca = 3$ . Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq a + b + c + 1.$$

*Démonstration.* L'inégalité est équivalente à

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc - (a + b + c) - 1 - (ab + bc + ca - 3) \geq 0.$$

On pose  $x = (b - 1)(c - 1)$ ,  $y = (a - 1)(c - 1)$  et  $z = (b - 1)(a - 1)$ . Comme  $xyz = [(a - 1)(b - 1)(c - 1)]^2 \geq 0$ , au moins un des nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  est non-négatif. Par symétrie, on peut supposer que  $x$  est non-négatif. Le membre gauche de l'inégalité à prouver s'écrit comme  $(a + 1)(b - 1)(c - 1) + (a - 1)^2 + (b - c)^2 = x(a + 1) + (a - 1)^2 + (b - c)^2 \geq 0$ .  $\square$

**Exercice 10** (Inégalité de Cauchy). Si  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ , alors

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

On a égalité si et seulement s'il existe un nombre  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $a = kx$ ,  $b = ky$  et  $c = kz$  (les deux triplets sont proportionnels).

**Remarque 1.** Dans les livres anglais, cette inégalité est parfois notée CBS comme abréviation pour Cauchy-Bounyakowski-Schwarz.

*Démonstration.* En développant, l'inégalité est équivalente à

$$2abxy + 2acxz + 2bcyz \leq (a^2y^2 + b^2x^2) + (a^2z^2 + c^2x^2) + (b^2z^2 + c^2y^2).$$

Or, on montre cela en appliquant l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique aux couples  $(a^2y^2, b^2x^2)$ ,  $(a^2z^2, c^2x^2)$  et  $(b^2z^2, c^2y^2)$ .  $\square$

**Exercice 11** (Inégalité de Minkowski). Si  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ , alors on a

$$\sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a égalité si et seulement si il existe un nombre  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $a = kx$ ,  $b = ky$  et  $c = kz$  (les deux triplets sont proportionnels).

*Démonstration.* En élevant au carré et en développant on obtient que l'inégalité est équivalente à l'inégalité de Cauchy.  $\square$

**Exercice 12.** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $a^2 + b^2 \geq c^2$ ,  $a^2 + c^2 \geq b^2$  et  $b^2 + c^2 \geq a^2$ . Montrer que

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \geq 4(a^6 + b^6 + c^6).$$

*Démonstration.* Par l'inégalité de Cauchy,  $(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $a = \max\{a, b, c\}$ . Alors  $a \geq b$ ,  $a \geq c$  et  $b^2 + c^2 \geq a^2$ . Ainsi  $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4a^4$ . Donc le membre gauche est plus grand ou égal à  $4a^4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(a^6 + a^4b^2 + a^4c^2) \geq 4(a^6 + b^6 + c^6)$ .  $\square$

**Exercice 13.** Soit un triangle ABC rectangle en A. Soient  $M \in [AB]$  et  $N \in [AC]$ . Montrer que :

$$MN \cdot BC \geq AM \cdot AC + AN \cdot AB,$$

où  $MN$  désigne la longueur du segment  $[MN]$ .

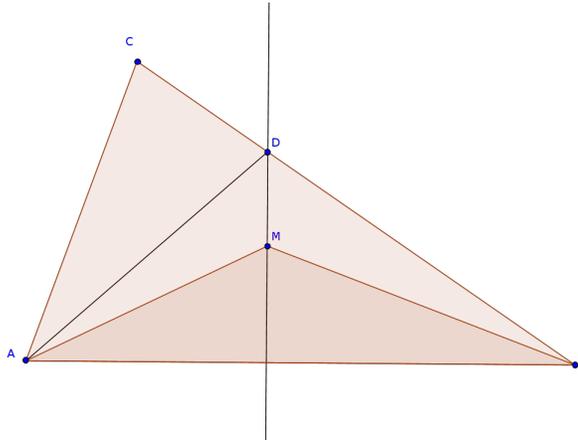
*Démonstration.* On note  $b = AB$ ,  $c = AC$ ,  $x = AM$  et  $y = AN$ . Alors l'inégalité devient  $\sqrt{b^2 + c^2} \sqrt{x^2 + y^2} \geq (by + cx)$ , ce qui est vrai par l'inégalité de Cauchy.  $\square$

**Exercice 14.** Si  $M$  est un point intérieur au triangle  $ABC$ , montrer que  $AM + BM + CM$  est compris entre le demi-périmètre et le périmètre.

*Démonstration.* Dans le triangle  $ABM$ , l'inégalité triangulaire donne  $AM + BM \geq AB$ . De même, on trouve  $AM + CM \geq AC$  et  $BM + CM \geq BC$ . En sommant, on a  $2(AM + BM + CM) \geq AB + BC + CA$ , donc  $AM + BM + CM \geq \frac{AB + BC + CA}{2}$ .

Pour la deuxième partie de la preuve, on va montrer un lemme.

**Lemme 1.** Soit  $ABC$  un triangle quelconque et  $M$  un point intérieur. Alors  $AM + MB \leq AC + CB$ .



*preuve du lemme.* Dans la figure ci-dessus on note  $D$  le point d'intersection entre la droite  $BC$  et la perpendiculaire de  $M$  sur  $AB$ . Par le théorème de Pythagore, on montre que  $AD > AM$  et  $BD > BM$ , donc  $AD + DB > AM + MB$ . Ensuite, par l'inégalité triangulaire au triangle  $ACD$ , on a  $AC + CD > AD$ . En ajoutant  $DB$ , on a  $AC + CD + DB > AD + DB$ , soit  $AC + CB > AD + DB$ . D'où,  $AC + CB > AM + MB$ .  $\square$

Revenant à la solution de l'exercice, on applique le lemme pour le triangle  $ABC$  avec les couples  $(A, B)$ ,  $(A, C)$  et  $(B, C)$  jouant le rôle de  $(A, B)$  dans le lemme :

$$\begin{aligned} AC + CB &\geq AM + MB, \\ AB + BC &\geq AM + MC, \\ BA + AC &\geq BM + MC. \end{aligned}$$

En sommant, on trouve  $2(AB + BC + CA) \geq 2(MA + MB + MC)$ , ce qui finit l'exercice.  $\square$