RÉCURRENCE ET SUITES

1 Exercices directs

Exercice 1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

1. $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$; 2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
3. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ 4. $2^n \geq n+1$
5. $9^n > 2 \cdot 4^n$ 6. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}} < 3$.

2 Comptages

Exercice 2. Calculer le nombres de numéros de n chiffres qui ne contiennent pas le chiffre 3.

Exercice 3. Calculer le nombre de façons de paver un rectangle 2×5 avec des pièces 2×1.

Exercice 4. Combien de nombres de n chiffres ont tous leurs chiffres en ordre croissant ?

3 Suites

Définition 1. On appelle suite à valeurs dans l'ensemble E toute énumération a_0, a_1, a_2, ... d'éléments de E qui peut prendre plusieurs fois la même valeur. Plus formellement, une suite à coefficients dans l'ensemble E est une fonction $a : \mathbb{N} \to E$. On écrit a_n comme une abréviation de $a(n)$.

Exemple 1. $a_n = n^2$; $a_n = n$ème décimale de π ; $a_n =$ nombre d'habitants de la Terre le 1er janvier de l'année n.

Définition 2.
1. Une suite est périodique s'il existe T tel que, pour tout n, $a_{n+T} = a_n$. Elle est "périodique à partir d'un certain rang" s'il existe deux entiers n_0 et T tels que, pour tout $n \geq n_0$, $a_{n+T} = a_n$.
2. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une fonction. Une suite est récursive définie par la fonction f si, pour tout entier n, $a_{n+1} = f(a_n)$.

Exercice 5 (Suites de Syracuse). Pour tout nombre entier a_0 on définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière récursive :
- si a_n est pair, alors $a_{n+1} = a_n/2$;
- si a_n est impair, alors $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

Quel est le comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a_0 = 1$, 2, 4 et, respectivement 2^k (k entier) ?

Proposition 1. Soient $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites récursives définies par la même fonction f. Alors on a

1. S'il existe n_1 et n_2 tels que $a_{n_1} = b_{n_2}$, alors pour tout k entier on a $a_{n_1+k} = b_{n_2+k}$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang, soit tous ses éléments sont distincts.

Exercice 6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Soit $u \neq 1$ et v deux nombres réels. Montrer que :

1. Si, pour tout n, $a_{n+1} = ua_n$, alors $a_n = u^n a_0$.
2. Si $a_{n+1} = a_n + v$, alors $a_n = a_0 + (n-1)v$.
3. Si $a_{n+1} = ua_n + v$, alors $a_n = u^n a_0 + \frac{u^n-1}{u-1}v$.

Exercice 7. Pour tout nombre réel $r \in]0,1[$, on appelle développement décimal de r a suite $(r_n)_n$ comme suit $r_0 = 0$ et :

$$\forall n \geq 0, r_{n+1} = \lfloor 10^{n+1}(r - \sum_{k=0}^{n} r_k 10^{-k}) \rfloor.$$

Montrer que

1. un nombre est rationnel si et seulement si son développement est périodique à partir d'un certain rang où s'annule à partir d'une position ;
2. entre deux nombres irrationnels il existe au moins un nombre rationnel ;
3. entre deux nombres rationnels il existe au moins un nombre irrationnel.

Exercice 8. Définissez une fonction $f : [0,1[\to [0,1[\times [0,1[$ telle que, pour tout couple $(a,b) \in [0,1[\times [0,1[$, il existe $c \in [0,1[$ tel que $f(c) = (a,b)$.

Exercice 9 (procédé diagonal de Cantor). Montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} \neq \mathbb{R}.$$

Exercice 10. Soient a et b deux entiers relatifs tels que l'équation $x^2 + ax + b$ a deux solutions réelles α et β. Montrer que pour tout n, $\alpha^n + \beta^n$ est un entier relatif.

Exercice 11. On pose $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et, pour $n \geq 0$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Montrer que

1. $F_n = (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}$ où α et β sont les deux racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ et $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ (formule de Binet) ;
2. $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$;
3. si m divise m, alors F_m divise F_n.

Exercice 12 (Fibonnacci comme base de numération). Montrer que tout nombre entier s'écrit comme suite de nombres de Fibonacci d'indice distincts.

4 Solutions

Solution (de l'exo 1). 1) On prouve par récurrence la proposition $P(n)$: "$\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$".

Initialisation Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} = 1 = 1(1+1)/2$, donc $P(1)$ est vraie.

Récurrence Supposons prouvée $P(n)$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k$. D'après $P(n)$ on peut remplacer la dernière somme par $n(n+1)/2$ et on obtient $\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + n(n+1)/2 = (n+1)(n+2)/2$. On a montré $P(n+1)$.

Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie.

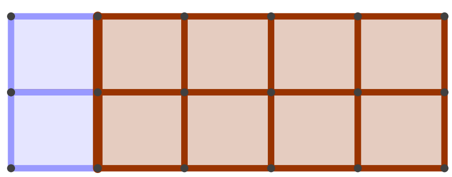
Les autres points de l'exercice se traitent de manière analogue.

Solution (de l'exo 2). On note a_n le nombre de numéros de n chiffres qui ne contiennent pas le chiffre 3. Tout tel numéro de $n+1$ chiffres commence par un tel numéro de n chiffres, suivi d'un chiffre autre que 3. Ainsi on a

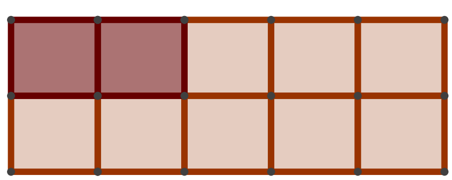
$$a_{n+1} = 9a_n.$$

Comme $a_1 = 8$, on trouve la formule $a_n = 8 \cdot 9^{n-1}$, qu'on prouve par récurrence.

Solution (de l'exo 3). On note a_n le nombre de façons de paver un rectangle $2 \times n$ avec des pièces 2×1. Pour paver un rectangle de longueur n on commence par placer la pièce du coin en haut à gauche. Si on place la pièce verticalement, on se ramène à compter a_{n-1}, comme dans la figure ci-dessous.



Si on place la pièce horizontalement, alors on est obligés de placer une autre pièce horizontalement, juste en dessous, comme dans la figure :



On se ramène dans ce cas à compter a_{n-2}. Ainsi on a la formule de récurrence :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Comme $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ on trouve $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ et $a_5 = 8$.

Solution (de l'exo 4). Pour tout couple (a, b) avec $1 \leq a \leq b \leq 9$, on peut avoir des numéros avec le premier chiffre a et le dernier b. Pour chaque numéro de n chiffres, on note x_1 la différence entre le deuxième chiffre et le premier, x_2 la différence entre le troisième et le premier, et ainsi de suite. On remarque que $x_1+x_2+\cdots x_{n-1} = b-a$. Le nombre de façons de placer k chaussettes identiques dans n tiroirs numérotés est $\binom{n+k-1}{n}$. Ainsi on peut donner une formule pour le nombre recherchée, mais on ne la simplifie pas.

Solution (de l'exo 5). On calcule les premiers termes de la suite pour $a_0 = 1$:

$$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

On montre par récurrence que

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \in 3\mathbb{Z} \\ 4 & n \in 3\mathbb{Z}+1 \\ 2 & n \in 3\mathbb{Z}+2 \end{cases} .$$

Si $a_0 = 2^k$, alors la suite descend $2^{k-1}, 2^{k-1}, \ldots$ (preuve par récurrence), ensuite elle devient périodique à partir de 4 (preuve par récurrence).

de la proposition 1. 1) L'étape de récurrence est comme suit : si $a_{n_1+k} = b_{n_2+k}$, alors $a_{n_1+k+1} = f(a_{n_1+k}) = f(b_{n_2+k}) = b_{n_2+k+1}$.

2) Plaçons nous dans le cas où la suite prend deux fois la même valeur. On a alors deux entiers n_1 et n_2 tels que $a_{n_1} = a_{n_2}$. on applique le point 1) avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la place de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on conclue que la suite est périodique à partir d'un certain rang.

□

Solution (de l'exo 6). 1) On montre par récurrence que, pour tout n, $a_n = u^n a_0$. Pour $n = 0$, la proposition est claire. On suppose le résultat vrai pour n. Alors $a_{n+1} = ua_n = u(u^n a_0) = u^{n+1}a_0$, donc le résultat est vrai pour $n + 1$.

2) On montre par récurrence que $a_n = a_0 + nv$. L'initialisation est vraie car, pour $n = 0$, $a_0 = a_0 + 0$. On suppose que $a_n = a_0 + nv$. On a $a_{n+1} = a_n + v = (a_0 + nv) + v = a_0 + (n + 1)v$, donc le résultat est vrai pour $n + 1$.

3) On considère la proposition $P(n)$: $a_n = u^{n-1}u_0 + \frac{u^n-1}{u-1}v$. Pour $n = 0$ on a $u^n u_0 + \frac{u^n-1}{u-1}v = u_0$. On suppose la proposition vraie pour n. On a

$$a_{n+1} = ua_n + v = u(u^n a_0 + \frac{u^n - 1}{u - 1}v) + v = u^n a_0 + \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}v.$$

On obtient que $P(n+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n.

Solution (de l'exo 7). 1) Un nombre est rationnel x si et seulement si sa partie fractionnaire, $x - \lfloor x \rfloor$, est rationnelle, donc on peut supposer $x < 1$. Soit $r = 0, x_1 \ldots x_N(p_1 \ldots p_T)$ un nombre réel dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Alors $10^N(x-\sum_{i=1}^N 10^{N-i}x_i) = 0,(p_1\dots p_T)$. Comme $10^T 0,(p_1\dots p_T)=\sum_{i=1}^T 10^{T-i}p_i+0,(p_1\dots p_T)$, on a

$$0,(p_1\dots p_T)=(\sum_{i=1}^T 10^{T-i}p_i)/(10^T-1).$$

En revenant à x on trouve $x=\sum_{i=1}^N 10^{N-i}x_i+10^{-N}(\sum_{i=1}^T 10^{T-i}p_i)/(10^T-1)$, qui est un nombre rationnel.

Réciproquement, supposons que $x=A/B$ est rationnel et montrons que son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Pour cela on commence par un lemme.

Lemme 1. Si b est un entier tel que pgcd$(b,10)=1$, alors il existe un entier T tel que b divise 10^T-1.

On considère la suite $10 \bmod b$, $10^2 \bmod b$, $10^3 \bmod b$, ... Comme la suite prend ces valeurs dans l'ensemble finit $\{0,1,\dots,b-1\}$, elle prend deux fois la même valeur, donc il exits deux entiers $n_1<n_2$ tels que

$$10^{n_2} \bmod b = 10^{n_1} \bmod b.$$

Alors b divise $10^{n_2}-10^{n_1}=10^{n_1}(10^{n_2-n_1}-1)$. Comme pgcd$(10,b)$=1, b divise 10^T-1 pour $T=n_2-n_1$.

Revenons à la solution de l'exercice. Pour $x=A/B$, on écrit $B=b2^i5^j$ avec $i,j\in\mathbb{N}$ et pgcd$(b,10)$=1. Pour $N=\max(i,j)$, on a $x=\frac{1}{10^N}\frac{2^{N-i}5^{N-j}A}{b}$. On fait la division de $2^{N-i}5^{N-j}A$ par b, en appelant q son quotient et a son reste. Ainsi $x=\frac{1}{10^N}(q+a/b)$ où $q<10^N$, $a<b$ et pgcd$(b,10)$=1. D'après le lemme montré ci-dessus, il existe T tel que $10^T-1=bu$ pour un entier u. Alors $a/b=(au)/(10^T-1)=0,(au)$, le nombre de période de longueur T égale à l'écriture en base 10 de au. Il reste à vérifier que $au<10^T$. Cela est vrai car $a<b$ et $bu=10^T-1<10^T$. Ainsi on connait le développement décimal

$$A/B=0,q_1\dots q_N(p_1\dots p_T),$$

où $\overline{q_1\dots q_N}$ est l'écriture décimale de q et $\overline{p_1\dots p_T}$ est celle de au.

<u>Commentaire</u> La base de numération, 10, ne joue aucun rôle. Si on remplace 10 par un autre entier dans la preuve du lemme, alors on obtient que, dans toute base, les nombres rationnels ont un développement périodique à partir d'un certain rang.

2) Comme au premier point, il suffit de montrer l'affirmation pour deux nombres rationnels de l'intervalle $[0,1[$. Soient $a,b\in[0,1[\bigcap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, $a<b$, $a=0,a_1a_2a_3\dots$ et $b=0,b_1b_2b_3\dots$. Soit N le plus petit entier tel que $a_N\neq b_N$. Alors on pose

$$c=0,b_1\dots b_N00\dots.$$

On voit que c est rationnel car ses décimales sont nulles à partir de la position $N+1$. Clairement on a $a<c$. Comme b est irrationnel, il a au moins une décimale après la N-ème qui est non nulle, disons la $N+k$-ème. Ainsi, b et c

ont les mêmes décimales jusqu'à la $N+k-1$-ème et la suivante est plus grande pour b que pour c. On conclut que c est plus petit que b.

3) Soient $a, b \in [0,1[\bigcap \mathbb{Q}$ telles que $a < b$, $a = 0, a_1 a_2 \ldots$ et $b = 0, b_1 b_2 \ldots$. Soit N le plus petit entier tel que $a_N < b_N$. Comme les développements qui finissent par $999\ldots$ sont interdits, il existe un entier positif k tel que $a = 0, a_1 \ldots a_N 9 \ldots 9 a_{N+k} \ldots$ avec $a_{N+k} \leq 8$. On appelle a^* le nombre rationnel qui coïncide avec a jusqu'à la décimale a_{N+k-1}, qui a 9 sur la position suivante et toutes les autres décimales nulles. Remarquons que tout nombre réel qui a les décimales de a^* jusqu'à la position a_{N+k} est compris entre a et b. On définit c comme le nombre réel qui a les mêmes décimales que a^* jusqu'à la position $N+k$ et les décimales de $\sqrt{2}$ après.

Commentaire Si on ne veut pas utiliser les décimales de $\sqrt{2}$, on peut utiliser la suite

$$01001000100001\ldots.$$

Cette suite ne peut pas avoir de période car. Si on suppose par l'absurde qu'elle a une période T, comme il existe un groupe de $T+1$ zéros consécutifs, la suite devrait être nulle à partir d'un certain rang, ce qui est impossible.

Solution (de l'exo 8). On définit f par

$$f(0, c_1 c_2 \ldots) = (0, c_1 c_3 c_5 \ldots,\ 0, c_2 c_4 c_6 \ldots).$$

Soit un couple de nombres réels $(a, b) \in [0,1[\times[0,1[$. La suite $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ n'est pas égale à 9 à partir d'un certain rang car les décimales de a et de b ne sont pas égales à 9 à partir d'un certain rang. On pose

$$c = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots$$

et on voit que $f(c) = (a, b)$.

Commentaire Cet exercice montre qu'on peut enregistrer deux nombres réels comme un seul. Pour un sens qui est défini dans la théorie des ensembles de Cantor, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ont le même cardinal.

Solution (de l'exo 9). On suppose par absurde qu'il existe une suite (a_n) telle que $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\} = \mathbb{R}$. Pour tous entiers n et k, on appelle $a_{n,k}$ la k-ème décimale du nombre a_n. On pose

$$b = 0, a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots.$$

On considère ensuite c un nombre réel qui s'obtient en modifiant toutes les décimales de b : si une décimale vaut 0 on la remplace par 1, pour toute autre valeur on lui soustrait 1.

Par la supposition faite, il existe un entier N tel que $a_N = c$. En particulier, la N-ème décimale de a_N, $a_{N,N}$, est égale à la N-ème décimale de c. Cela est impossible car c a été obtenu en modifiant toutes les décimales de b.

Solution (de l'exercice 10). On remarque d'abord que $\alpha + \beta = -a \in \mathbb{Z}$ et $\alpha\beta = b \in \mathbb{Z}$. On montre par récurrence que $\alpha^n + \beta^n$ est un nombre entier relatif. La vérification pour $n = 0$ est immédiate car $\alpha^0 + \beta^0 = 2$. On vérifie aussi pour

$n = 1 : \alpha + \beta = -a \in \mathbb{Z}$. Supposons la proposition vraie pour $0, 1, \ldots, n-1, n$ et faisons la preuve pour $n+1$. On remarque que

$$(\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + (\alpha\beta)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}).$$

Par hypothèse de récurrence, $\alpha^n+\beta^n$ et $\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ sont entiers relatifs. Comme $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont des entiers, $\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$ l'est également.

Solution (de l'exercice 11). 1) On fait une récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a $(\alpha^0 - \beta^0)/\sqrt{5} = 0 = F_0$ donc la proposition est vraie. Pour $n = 1$ on a $(\alpha - \beta)/\sqrt{5} = \sqrt{5}/\sqrt{5} = 1 = F_1$ donc la proposition est vraie. On suppose la proposition vraie pour n et $n+1$. On a

$$\begin{aligned}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})/\sqrt{5} &= (\alpha^n\alpha^2 - \beta^n\beta^2)/\sqrt{5}\\ &= (\alpha^n(\alpha+1) - \beta^n(\beta+1))\\ &= (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/\sqrt{5} + (\alpha^n - \beta^n)/\sqrt{5}\\ &= F_{n+1} + F_n.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n-1} &= (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})/5\\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\beta^2 + \alpha^2)(\alpha\beta)^{n-1}\\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2 + (-1)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_n^2 + (-1))^n &= (\alpha^n - \beta^n)^2/5 + (-1)^n)\\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + (-1)^n\\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2 + (-1)^n\end{aligned}$$

3) On écrit $n = md$. On applique l'identité

$$x^d - y^d = (x-y)(x^{d-1}y + x^{d-2}y^2 + \cdots + xy^{d-2} + y^{d-1}).$$

pour $x = \alpha^m$ et $y = \beta^m$. Ainsi

$$\begin{aligned}F_n/F_m &= \textstyle\sum_{k=0}^{d} \alpha^{mk}\beta^{(d-k)m}\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\lfloor d/2\rfloor} (\alpha\beta)^i(\alpha^{m(d-2i)} + \beta^{m(d-2i)}) + \delta,\end{aligned}$$

où δ vaut 0 si $d+1$ est impair et $(-1)^{(d+1)/2}$ sinon. D'après l'exercice 10 tous les termes de cette somme sont des entiers relatifs, donc F_n/F_m est un entier relatif.

Solution (de l'exercice 12). Pour écrire un nombre x comme somme de termes de Fibonacci on soustrait le plus grand nombre de Fibonacci F_n inférieur à x, ensuite on recommence avec $x - F_n$. Il suffit donc de montrer que le plus grand terme de Fibonacci inférieur à $x - F_n$ est strictement inférieur à F_n.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 2$,

$$F_n < F_{n+1} < 2F_n.$$

Pour $n = 2$, on a $F_2 = 2 < 3 = F_3 < 4 = 2F_2$. Pour $n = 3$ on a $F_3 = 3 < 5 = F_4 < 6 = 2F_3$. On suppose la proposition vraie pour n et $n+1$:

$$\begin{gathered}F_n < F_{n+1} < 2F_n\\ F_{n+1} < F_{n+2} < F_{n+1}.\end{gathered}$$

En rajoutant les deux suites d'inégalités, on a

$$F_{n+2} < F_{n+3} < 2F_{n+2}.$$

Montrons que pour tout $x > 5$, il existe un terme de Fibonacci dans l'intervalle $[x/2, x]$. Soit n le plus grand entier tel que $F_{n-1} < x/2$. Alors $F_n > x/2$. D'après l'inégalité prouvée par récurrence, $F_n < 2F_{n-1}$. Et, ensuite $2F_{n-1} < 2x/2 = x$. Ainsi F_n est contenu entre $x/2$ et x.

On conclut que le procédé décrit au début de la solution permet de remplacer x par $x - F_n$ qui est inférieur à $x/2$. Ainsi la suite de termes de Fibonacci utilisés est strictement décroissante.

Commentaire Il est théoriquement possible de construire des ordinateurs où l'écriture $\overline{1001101}$ désigne $F_0 + F_3 + F_4 + F_6$. Dans ce cas, les calculs d'addition d'entiers se feraient avec moins de retenus. Le désavantage serait qu'un nombre utilise plus de termes de Fibonacci que de chiffres en base 2. En effet, on peut montrer par récurrence que $F_n < 2^n$. Or, comme les termes de la base de numération sont plus petits, on utilise plus de termes.