EPFL 2009-2010

LES PERMUTATIONS

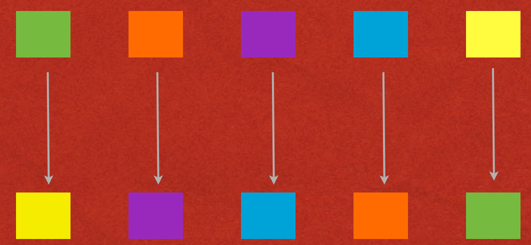
Algèbre Linéaire

Génie Civil, Environnement

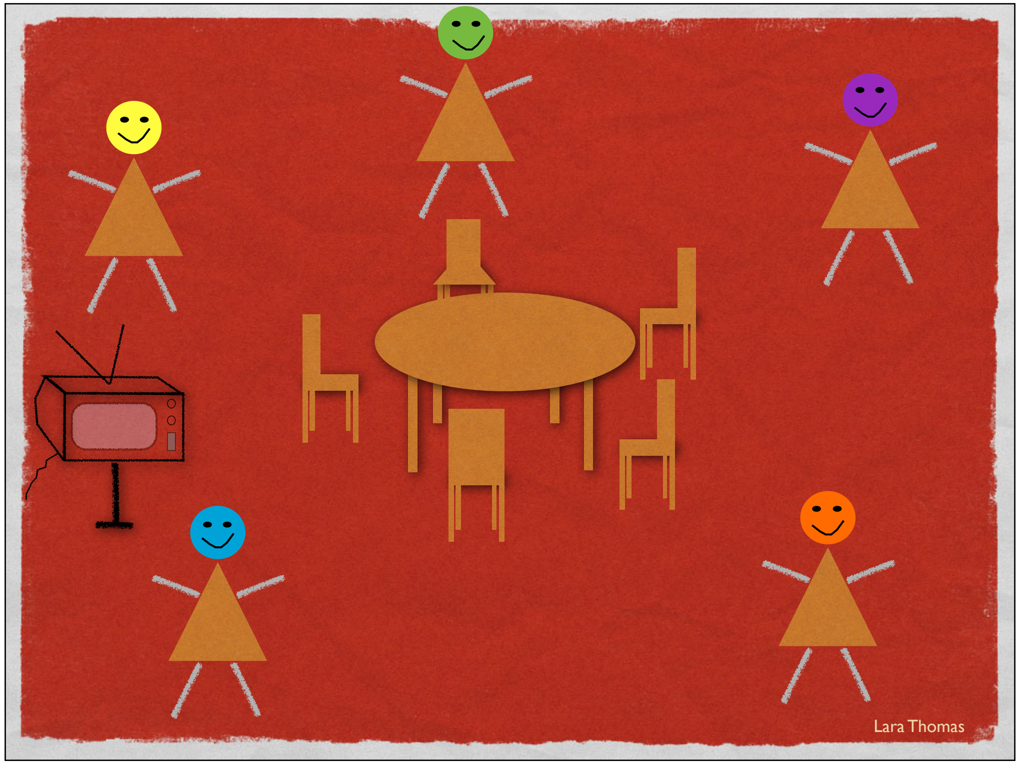
Dr Lara Thomas

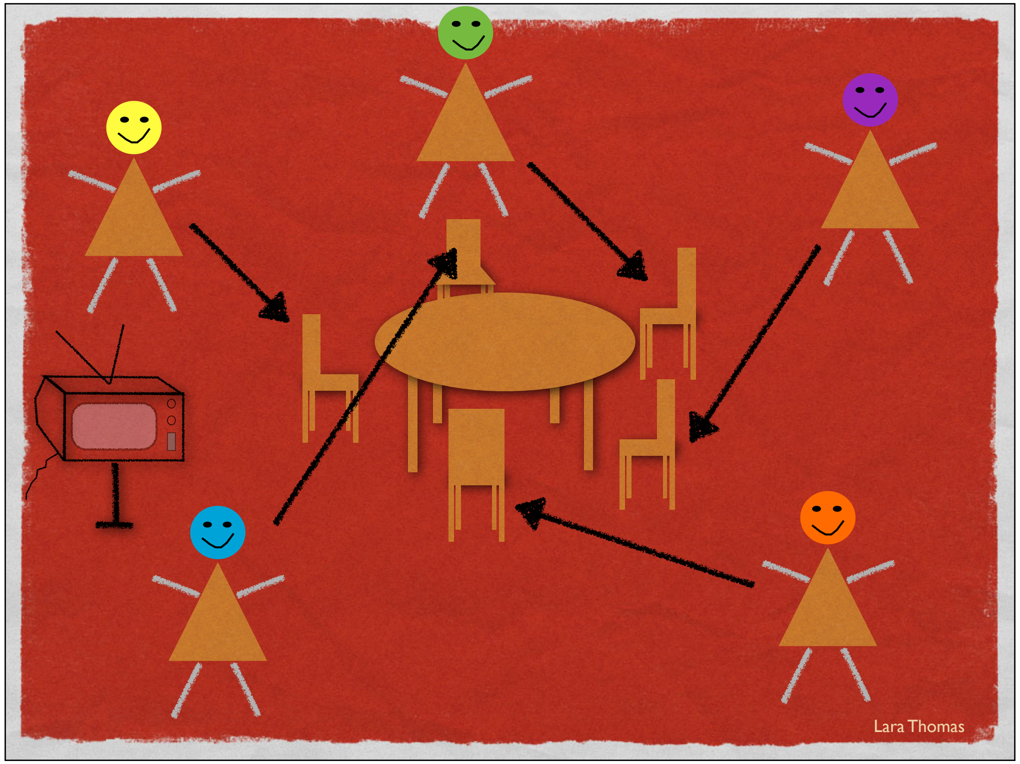
DÉFINITION

- Une *permutation* d'un ensemble A est une bijection de A dans A :

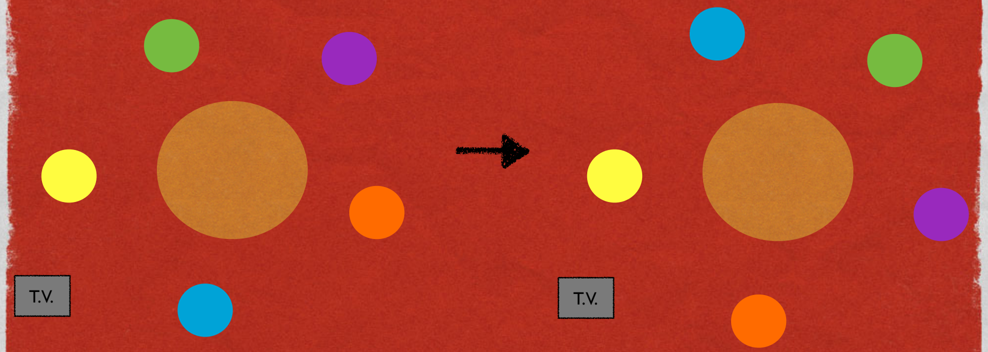


- Exemple : Comment disposer 5 personnes autour d’une table ?


Lara Thomas


Lara Thomas

- Vue d'en haut :

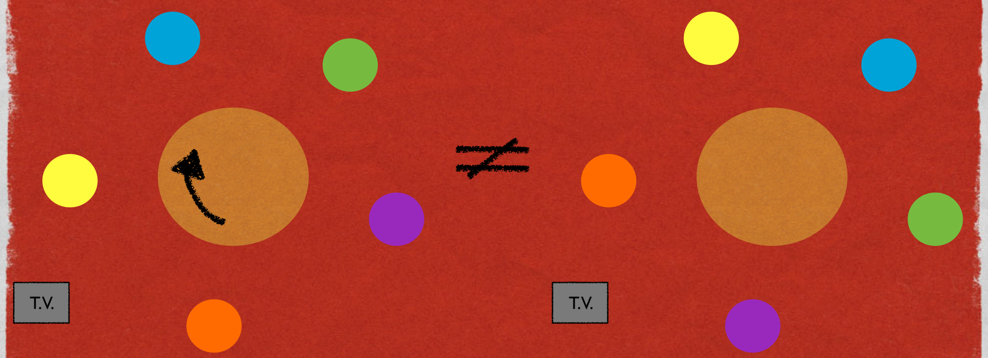


Disposition initiale

Nouvelle disposition

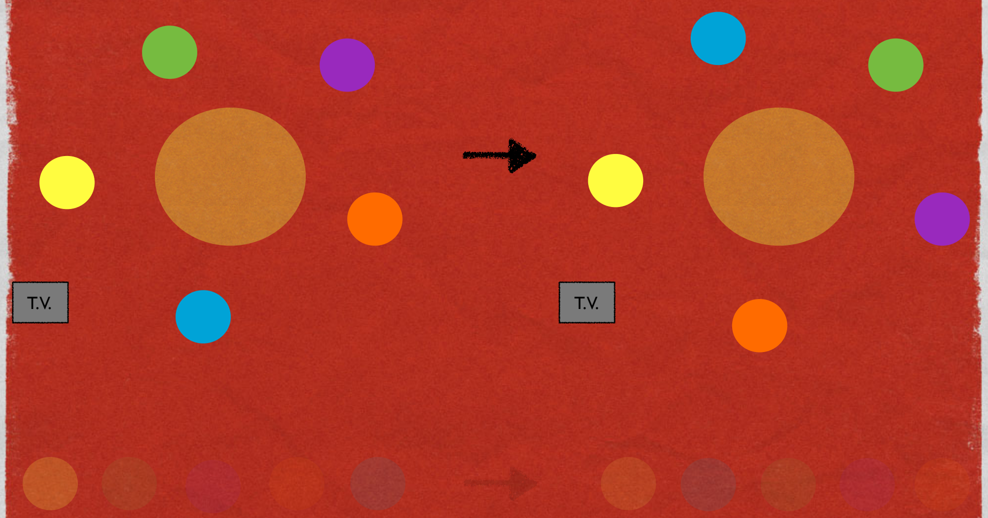
Lara Thomas

- Remarque :

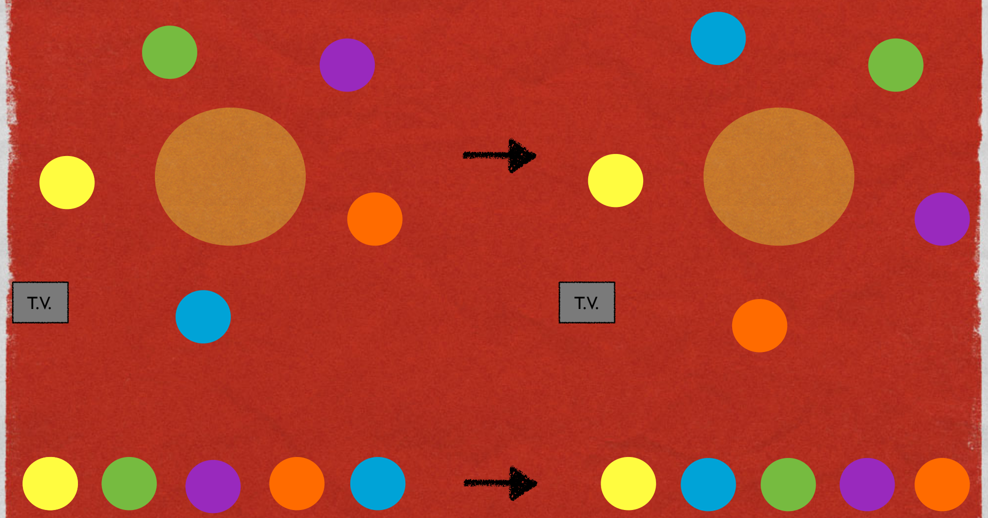


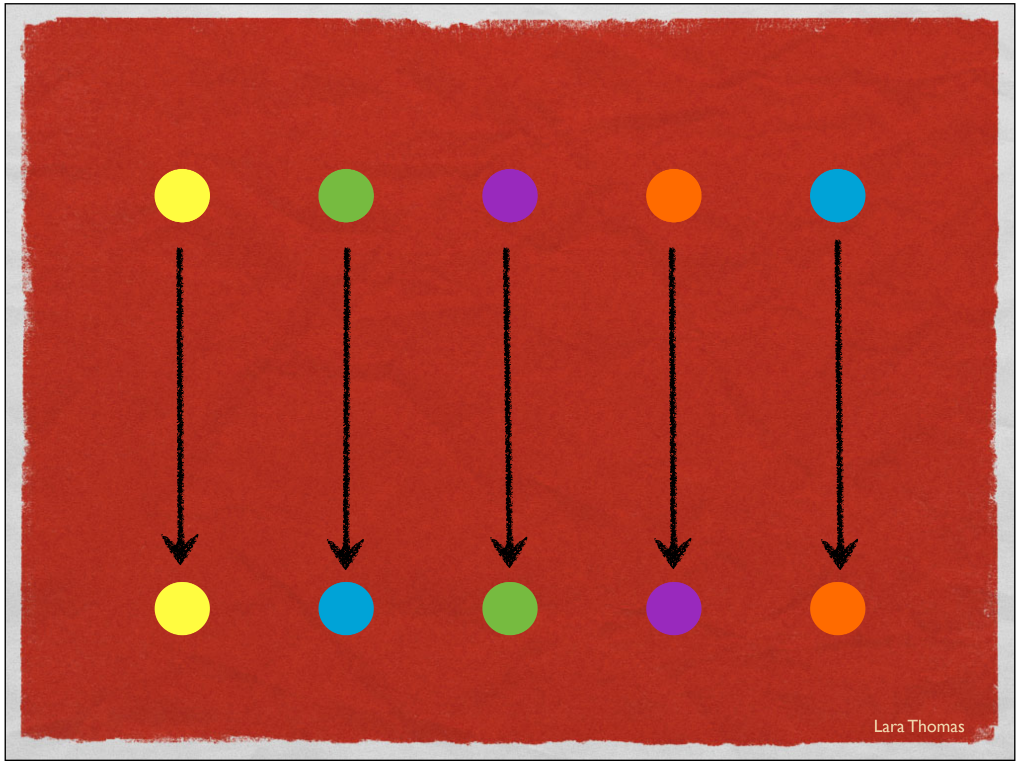
Ces deux dispositions sont distinctes.

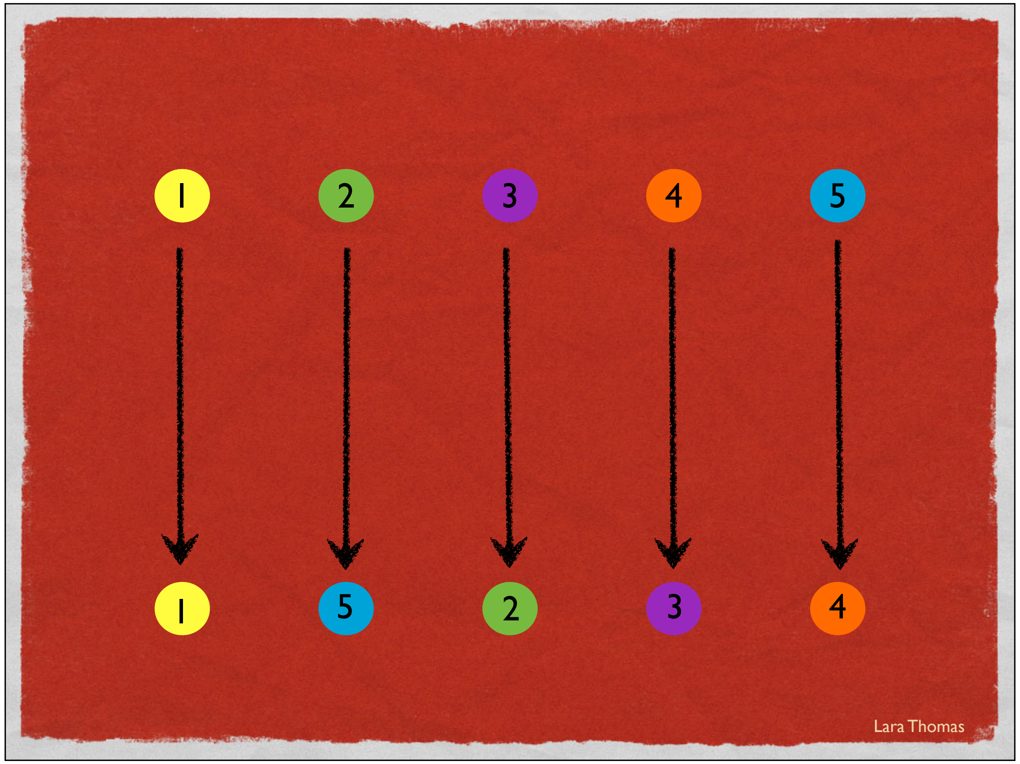
- Retour à notre permutation :



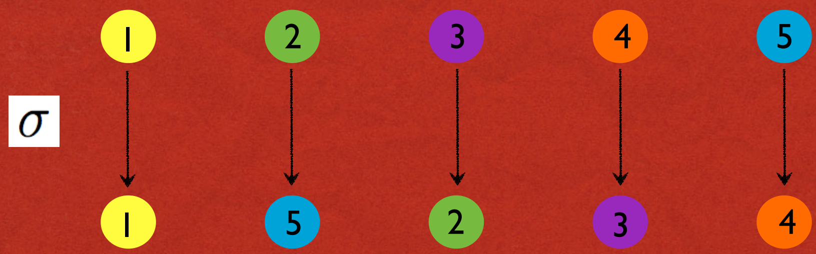
- Retour à notre permutation :




Lara Thomas

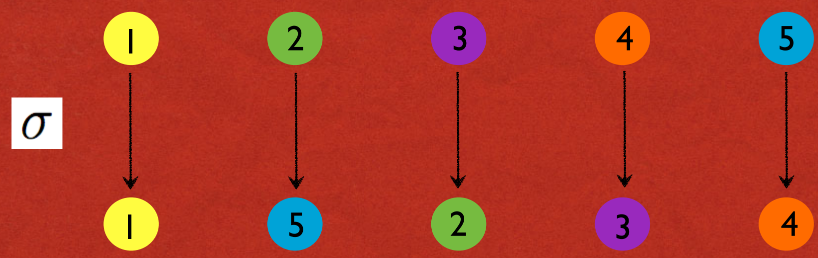

1
2
3
4
5
1
5
2
3
4
Lara Thomas

- S_5 = l'ensemble des permutations de {1,2,3,4,5}.



On est donc ramené à l'étude des permutations de {1,2,3,4,5}.

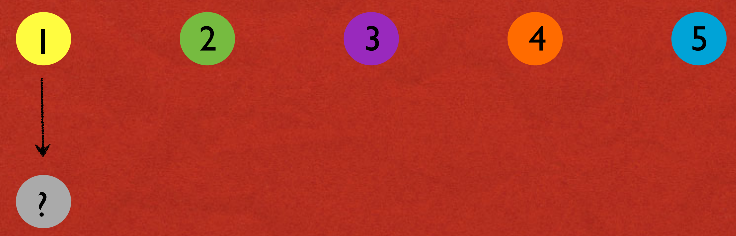
- S_5 = l'ensemble des permutations de {1,2,3,4,5}.



Notations :

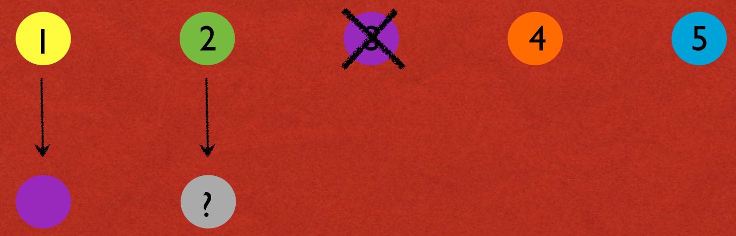
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Nombre de permutations de S_5



5 possibilités

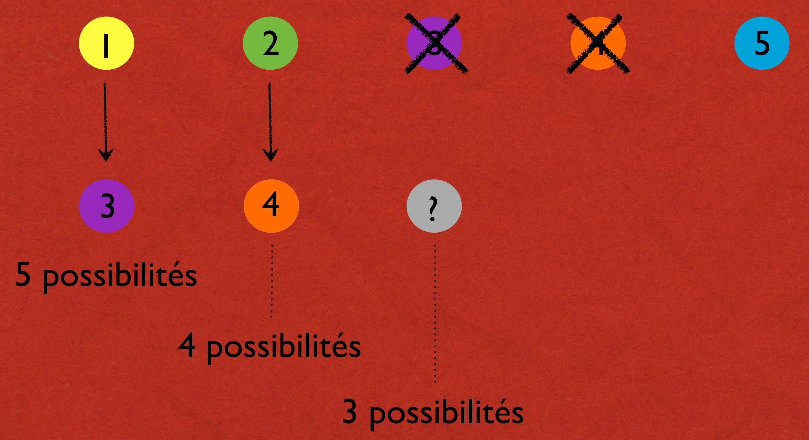
- Nombre de permutations de S_5



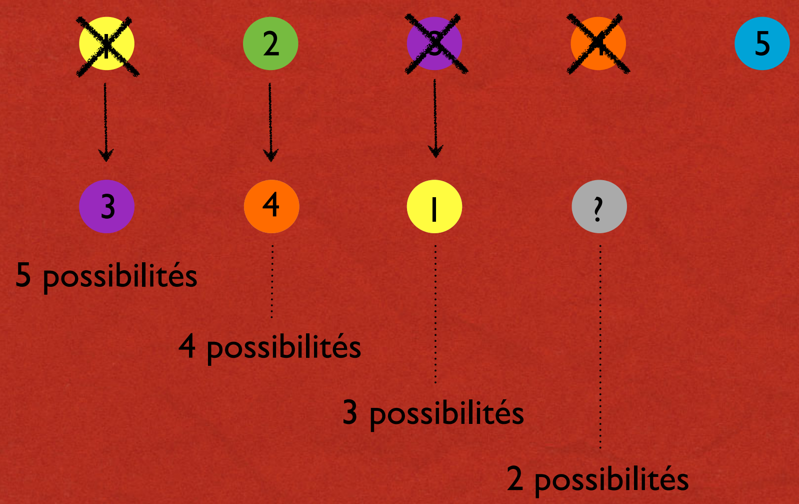
5 possibilités

4 possibilités

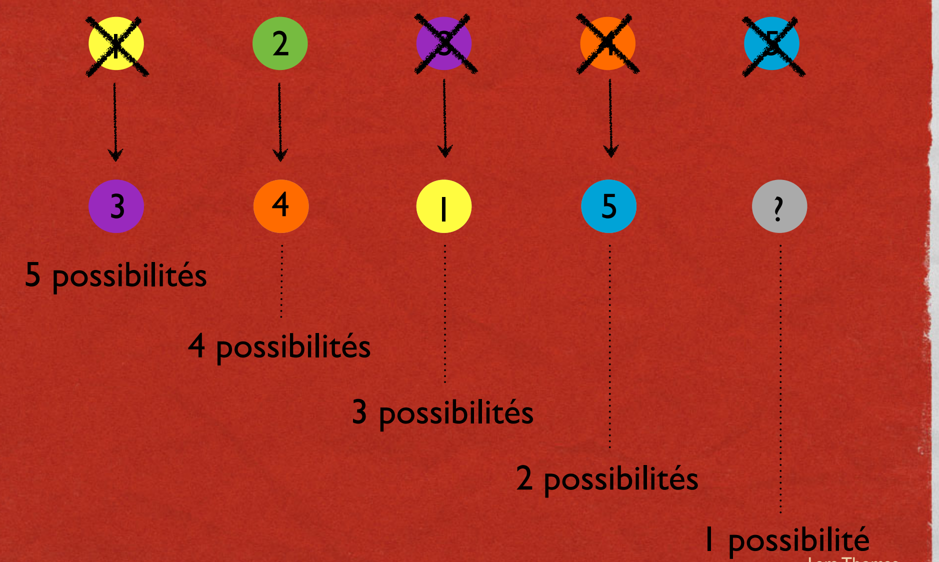
- Nombre de permutations de S_5



- Nombre de permutations de S_5

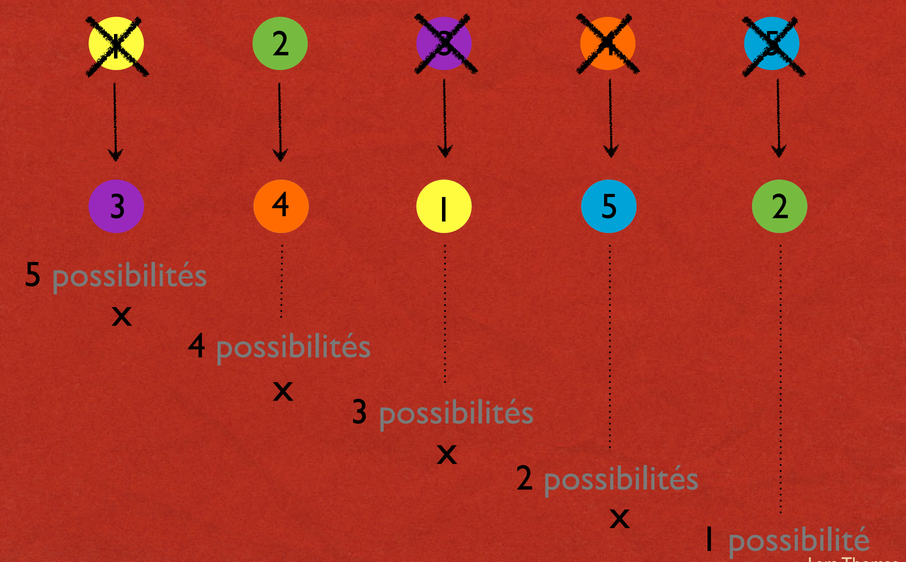


- Nombre de permutations de S_5



Lara Thomas

- Nombre de permutations de S_5



Lara Thomas

- Nombre de permutations de S_5

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

- Il y a donc 120 façons différentes de placer 5 personnes autour d'une table !

GÉNÉRALITÉS

- S_n = ensemble des permutations de {1,2,...,n}
- cardinal de S_n = 1 x 2 x ... x n = n!
- une permutation de S_n est notée :

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Permutations particulières

- la permutation identité

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{pmatrix}$$

- les transpositions

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Permutations particulières

- la permutation identité

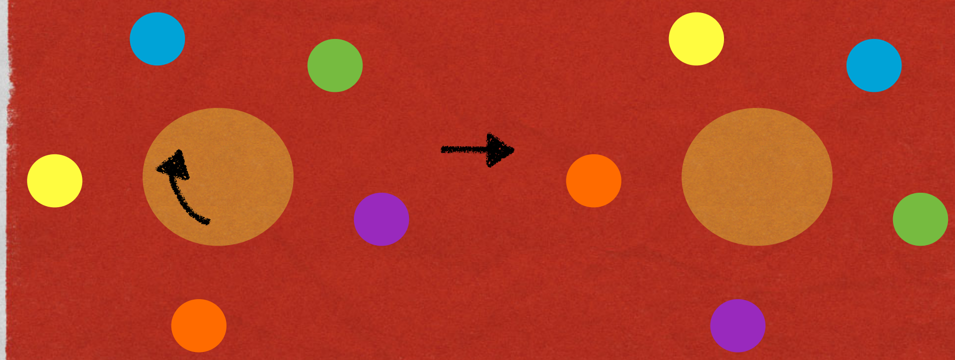
$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & n \end{pmatrix}$$

- les transpositions

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Permutations particulières

- les cycles... exemple :



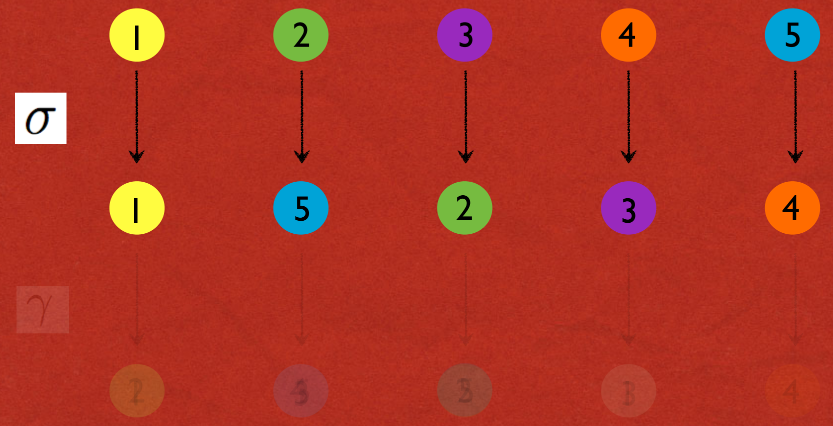
Composition de permutations... exemple pour n=5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Lara Thomas

Composition de permutations… exemple pour n=5 :

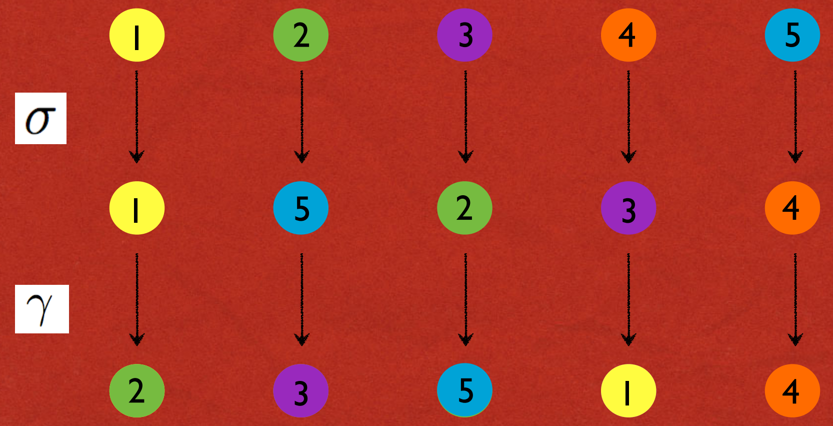
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



Lara Thomas

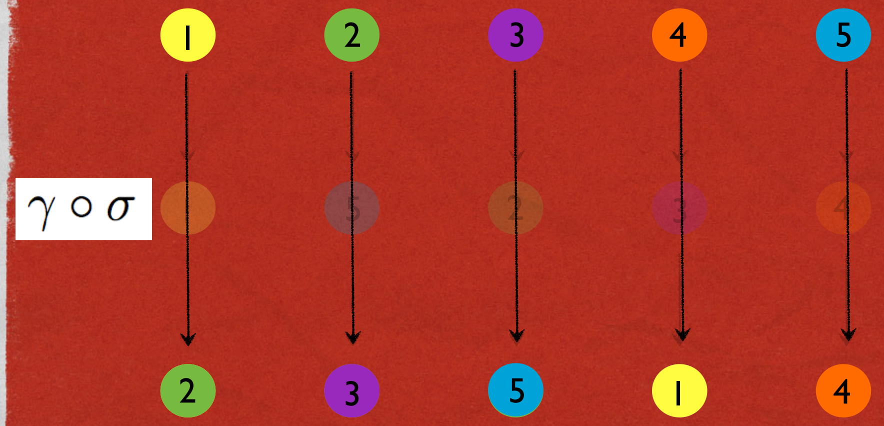
Composition de permutations... exemple pour n=5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



Composition de permutations... exemple pour n=5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



Lara Thomas

Composition de permutations... exemple pour n=5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Attention !! En général : $\sigma \circ \gamma \neq \gamma \circ \sigma$

Composition de permutations... exemple pour n=5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma \circ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Attention !! En général : $\sigma \circ \gamma \neq \gamma \circ \sigma$

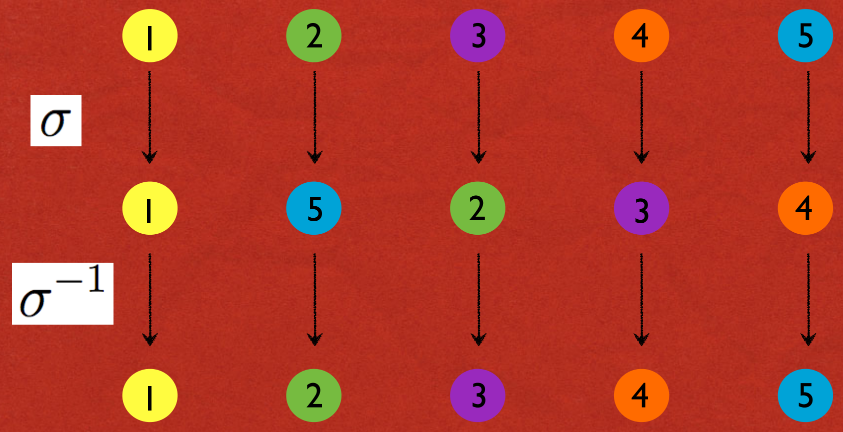
Permutations inverses

- Dans S_n, l'inverse d'une permutation est une autre permutation telle que la composée donne l'identité :

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id} = \sigma^{-1} \circ \sigma$$

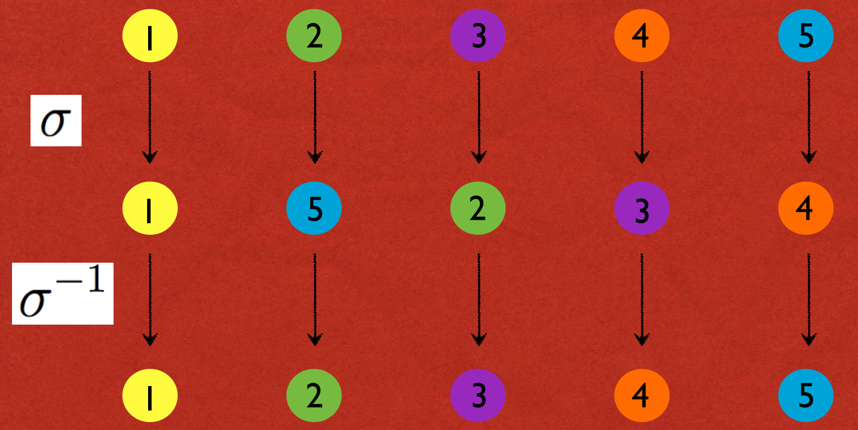
Toutes les permutations sont inversibles !

- Exemple :



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- Exemple :



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- La permutation inverse d'une transposition est elle-même !

$$\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$$